ПУЛЬСАЦИОННАЯ СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим неподвижную среду, находящуюся в поле тяжести. Если жидкость находится в однородном гравитационном поле, то на каждую единицу ее объема действует сила ρg. Движения, происходящие в стратифицированной среде, не вносит значительных изменений в распределение плотности и температуры, установившееся в покоящейся среде. Это позволяет значительно упростить систему уравнений, линеаризуя их относительно параметров состояния неподвижной среды. Для вывода этих, так называемых уравнений свободной конвекции, будем рассматривать жидкость как несжимаемую. Это означает, что давление предполагается достаточно мало меняющимся, так что изменением плотности, под влиянием изменения давления, можно пренебречь. Влиянием же неоднородности температуры жидкости на плотность при этом пренебрегать нельзя, поскольку именно этим обусловлено возникновение архимедовых сил. Выше изложенное заключение в литературе известно как приближение Буссинеска. Таким образом, получим следующее выражение архимедовых сил для уравнения вторых моментов

$$F_u = -\beta g\left(\delta_{3i}\overline{tu_j} + \delta_{3j}\overline{tu_i}\right) \qquad\qquad F_t = -\beta g\overline{t^2} \qquad (1)$$

Выполним теперь расчет тензоров турбулентных напряжений и потоков тепла для трехмерного стратифицированного течения. Для этой цели воспользуемся уравнениями (6-10, ЛЕК-4) для $\overline{u_i u_j}$, $\overline{u_i t}$ и $\overline{t^2}$ с учетом (1) и запишем в развернутом виде без молекулярных эффектов

$$\overline{u_1\ u_3}\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{k}{2}\frac{\sqrt{E}}{l}\left(\overline{u_1^{\,2}} - \frac{2}{3}E\right) + \frac{1}{3}c\frac{E^{3/2}}{l} = 0$$

$$\frac{k}{2}\frac{\sqrt{E}}{l}\left(\overline{u_3^{\,2}} - \frac{2}{3}E\right) + \frac{1}{3}c\frac{E^{3/2}}{l} - \beta g\overline{tu_3} = 0$$

$$\overline{u_2\ u_3}\ \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{k}{2}\frac{\sqrt{E}}{l}\left(\overline{u_2} - \frac{2}{3}E\right) + \frac{1}{3}c\frac{E^{3/2}}{l} = 0$$

$$\overline{u_2\ u_3}\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \overline{u_1\ u_3}\ \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + k\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_1\ u_2} = 0$$

$$\overline{u_3^{\,2}}\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + k\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_1\ u_3} - \beta g\overline{tu_1} = 0 \tag{2}$$

$$\overline{u_3^{\,2}}\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + k\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_2\ u_3} - \beta g\overline{tu_2} = 0$$

$$\overline{tu_3}\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \overline{u_1\ u_3}\ \frac{\partial T}{\partial x_3} + k_t\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{tu_1} = 0$$

$$\overline{u_3^{\,2}}\frac{\partial T}{\partial x_3} + k_t\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{tu_3} - \beta g\overline{t^2} = 0$$

$$\overline{tu_3}\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \overline{u_2\ u_3}\ \frac{\partial T}{\partial x_3} + k_t\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{tu_2} = 0$$

$$\overline{tu_3}\ \frac{\partial T}{\partial x_3} + c_t\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{t^2} = 0$$

Решения уравнений будем искать в виде двух сомножителей

$$E = E_0 \psi$$

$$\overline{u_1^{\,2}} = \left(\overline{u_1^{\,2}}\right)_0 \cdot \Omega_1 \;, \qquad \overline{u_2^{\,2}} = \left(\overline{u_2^{\,2}}\right)_0 \cdot \Omega_2 \;, \qquad \overline{u_3^{\,2}} = \left(u_3^{\,2}\right)_0 \cdot \Omega_3$$

$$\overline{u_1\, u_3} = \left(\overline{u_1\, u_3}\right)_0 \cdot \Omega_4 \;, \quad \overline{u_2\, u_3} = \left(\overline{u_2\, u_3}\right)_0 \cdot \Omega_5 \;, \quad \overline{u_1\, u_2} = \left(\overline{u_1\, u_2}\right)_0 \cdot \Omega_6 \quad (3)$$

$$t\overline{u_3} = \left(t\overline{u_3}\right)_0 \cdot \Omega_7 \;, \quad t\overline{u_1} = \left(t\overline{u_1}\right)_0 \cdot \Omega_8 \;, \quad t\overline{u_2} = \left(t\overline{u_2}\right)_0 \cdot \Omega_9$$

$$\bar{t}^{\,2} = \left(\bar{t}^{\,2}\right)_0 \cdot \Omega_{10}$$

Первый из них с индексом “0” обозначает соответствующую величину для однородной среды.

$$\left(\overline{u_3^{\,2}}\right)_0 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{c}{k}\right)\frac{1}{c^{2/3}}\, l^2 \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

$$\left(\overline{u_1^{\,2}}\right)_0 = \frac{2}{3}\frac{c}{k}\frac{1}{c^{2/3}}\, l^2 \left[\left(\frac{k}{c} - 1\right)\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{k}{c} + 2\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

$$\left(\overline{u_2^{\,2}}\right)_0 = \frac{2}{3}\frac{c}{k}\frac{1}{c^{2/3}}\, l^2 \left[\left(\frac{k}{c} - 1\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{k}{c} + 2\right)\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

$$\left(-\overline{u_1 u_3}\right)_0 = l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(-\overline{u_2 u_3}\right)_0 = l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{u_1 u_2}\right)_0 = 2\frac{c^{1/3}}{k}\, l^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) \qquad (4)$$

$$\left(\overline{u_1 t}\right)_0 = 2\frac{c^{1/3}}{k_t}\left(1 + \frac{k}{k_t}\right) l^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{u_2 t}\right)_0 = 2\frac{c^{1/3}}{k_t}\left(1+\frac{k}{k_t}\right)l^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(-\overline{u_3 t}\right)_0 = \frac{k}{k_t}\, l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{t^2}\right)_0 = \frac{k}{k_t}\frac{c}{c_t}\frac{1}{c^{2/3}}\, l^2\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)^2$$

$$E_0 = \frac{1}{c^{2/3}}\, l^2\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2\right]$$

Второй сомножитель Ω_i учитывает влияние стратификации среды и является функцией числа Ричардсона R_i:

$$\psi = \frac{1}{2}\left[1 - r\,Ri' + \sqrt{1 - r(r-2q)Ri' + (r-2)^2\, Ri'^2}\right]$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \psi\,\frac{\frac{2}{3}\left(2+\frac{c}{k}\right)\psi + \left[\frac{2}{3}\frac{k}{c}\left(2+\frac{c}{k}\right)+4\right]Ri'}{\frac{2}{3}\left(2+\frac{c}{k}\right)\left(\psi + pRi'\right)}$$

$$\Omega_3 = \psi\,\frac{\psi + \frac{k}{c_t}Ri'}{\psi + pRi'}, \quad \Omega_4 = \Omega_5 = \frac{\psi^{3/2}\left(\psi + qRi'\right)}{\left(\psi + Ri'\right)\left(\psi + pRi'\right)}$$

$$\Omega_6 = \frac{\psi\left(\psi + qRi'\right)}{\left(\psi + Ri'\right)\left(\psi + pRi'\right)}, \qquad \Omega_7 = \frac{\psi^{3/2}}{\left(\psi + pRi'\right)}$$

$$\Omega_8 = \Omega_9 = \frac{\psi\left[\left(1 + \frac{k}{k_t}\right)\psi + \left(\frac{k}{k_t} + q\right)Ri'\right]}{\left(1 + \frac{k}{k_t}\right)\left(\psi + Ri'\right)\left(\psi + pRi'\right)} \tag{5}$$

$$\Omega_{10} = \frac{\psi}{\left(\psi + p\,Ri'\right)}$$

$$Ri' = \frac{3}{2}\left[\frac{k_t}{k}\left(\frac{k}{c} - 1\right)\right]^{-1} Ri, \quad Ri = \frac{\beta g \frac{\partial T}{\partial x_3}}{\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2}$$

$$p = \frac{k}{c} + 2\,, \quad q = \frac{k}{c_t} - \frac{k}{k_t}\,, \quad r = \frac{7}{3} + \frac{k}{c}\left(\frac{2}{3} + \frac{c}{c_t}\right)$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{k}}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{k}{c} - 1\right)\right]^{3/4}, \quad c = \frac{c^{3/2}}{k}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{k}{c} - 1\right)\right]^{3/4}$$

Очевидно, что $\psi(0) = 1$, а также, что некоторые Ω_i из соображений симметрии должны совпадать. Из структур функции стратификации можно установить, что неустойчивая стратификация приводит к возрастанию всех моментов второго порядка, а устойчивая - к уменьшению. При критическом значении число Ричардсона $R_i = \dfrac{q}{r - 1} \approx 1.3$ и все функции обращаются в нуль, что свидетельствует о подавлении архимедовыми силами пульсационного движения. Необходимо обсудит оценку появившихся двух новых констант k_t и c_t. Предполагается, что численные коэффициенты в выражениях для скорости диссипации пульсационной энергии E и вырождения температурных пульсаций $\overline{t^2}$ приблизительно одинаковы: $\frac{c}{c_t} = 1$. Отношение $\frac{k}{k_t}$ представляет собой известное турбулентное число Прандтля, которое по опытным данным $\mathrm{Pr} = \frac{k}{k_t} \cong 0{,}75$.

В заключении отметим, что все полученные выражения для тензоров турбулентных напряжений и турбулентных потоков тепла могут быть использованы для расчета различных типов турбулентных сдвиговых течений в стратифицированной среде.